

ESTUDO COMPUTACIONAL DE FRATURAS ATRAVÉS DO MODELO DE FUSÍVEIS ALEATÓRIOS



SILVA, Italo Luis ¹
FREITAS, Kenedy Antonio ²

RESUMO

Este estudo avaliou as propriedades de quebra do modelo de fusíveis aleatórios quando aplicado a diferentes desordens, tamanhos de rede e geometrias. Em especial, objetivou-se comparar as geometrias quadrada, 45 graus e hexagonal, sendo esta última inédita. Foi verificada a mudança de comportamento no perfil das fraturas a partir da desordem de 40% para todas as redes, e encontrou-se um padrão de valores para os expoentes da Lei de Potência estudada dentro de uma mesma geometria de rede.

PALAVRAS-CHAVE: Fraturas. Modelo de fusíveis aleatórios. Física computacional.

INTRODUÇÃO

O fenômeno físico de fraturas é alvo de pesquisas, sobretudo por sua significância para as Engenharias e sua importância econômica e tecnológica (OTOMAR, 2005). Alguns modelos diferentes são utilizados para o estudo do fenômeno, como o modelo elástico (BERNARDES; MOREIRA, 1994).

Uma fratura consiste na separação total de um sólido em duas ou mais partes, mediante tensões ou esforço mecânico. O esforço

necessário para alcançar tal fenômeno depende de diversos fatores, tais como a desordem do material, a forma de aplicação da tensão e condições externas como temperatura e pressão (FREITAS, 2007).

Vários fatores contribuem para o fenômeno de fratura, entre eles a presença de desordem no material, que tem importante papel na propagação de trincas. Como as desordens aparecem em padrões aleatórios, físicos estatísticos têm utilizado técnicas de sistemas desordenados para estudar fenômenos de fratura.

Uma dessas técnicas é a de discretizar o sistema, isto é, considerá-lo como uma rede e analisar suas propriedades macroscópicas. Alguns trabalhos utilizam o modelo elástico, enquanto outros aplicam uma simplificação que considera o análogo elétrico do modelo elástico, isto é, substituir a força elástica pela corrente elétrica e o deslocamento pela tensão (FREITAS, 2007). O resultado é uma semelhança na forma das equações e dos resultados numéricos, mas com uma diferença essencial: força e deslocamento são grandezas vetoriais, enquanto corrente e tensão são grandezas escalares. Como grandezas escalares são conceitualmente e numericamente mais simples que suas contrapartes vetoriais, o modelo elétrico é justificado.

TRABALHOS RELACIONADOS

Em Bernardes e Moreira (1994), explora-se um modelo elástico sobre aglomerado de fibras em duas dimensões, onde N fibras paralelas são

¹ Faculdade Governador Ozanam Coelho.

E-mail: italo@maleldil.com

² Faculdade Governador Ozanam Coelho.

E-mail: kenedy@fagoc.br

dispostas entre dois pratos e um destes é puxado na direção paralela às fibras. A quebra de uma fibra se dá de acordo com uma distribuição de probabilidade relacionada à sua energia elástica. Foi estudado o comportamento das fraturas em relação a condições de temperatura e tração por tempo. Menezes-Sobrinho et al. (2000) estudaram a existência de dois regimes de fratura no modelo de materiais fibrosos: o catastrófico e o dúctil. O modelo catastrófico é caracterizado por uma fratura de perfil pouco sinuoso e pelo rompimento das fibras próximas. O modelo dúctil é caracterizado por uma fratura de perfil muito sinuoso e pelo rompimento de fibras próximas e pelo aparecimento de pequenos aglomerados isolados na rede. Nesse trabalho, os autores verificaram, para o catastrófico, uma deformação inicial que se espalhou pelo aglomerado, produzindo uma fratura; e no dúctil, pequenas falhas que se espalharam pelo aglomerado, enfraquecendo-o gradualmente. A fronteira entre os dois regimes foi estudada em termos da teoria de percolação, em que a densidade de percolação p foi proporcional ao tamanho de sistema L . Os autores simularam o modelo baseado em materiais fibrosos, considerando a altura da ruptura nas fibras e definiram o conceito de rugosidade como a variância em torno da altura média. Eles investigaram o relacionamento entre a rugosidade e dureza da fratura, encontrando leis de potências (MENEZES-SOBRINHO et al., 2001).

Um estudo realizado por Kahng et al. (1988) investigou as propriedades de uma rede de fusíveis aleatórios, em que cada elemento da rede se comportava como um fusível linear. O processo de queima acontecia se a queda de potencial fosse menor que um valor limite, e, depois de sua queima, o fusível comportava-se como um isolante. Nesse estudo, foi considerada uma rede completamente ocupada com fusíveis de resistência uniforme, em que se variava a queda de voltagem limite. Como resultado, verificou-se que as características do sistema variavam em termos da variação da queda de potencial w e da dimensão linear da rede L . Dois perfis de fraturas foram evidenciados: o frágil, no qual ocorre comportamento catastrófico, e o dúctil, em que ocorre comportamento de queima lenta.

No trabalho de De Arcangelis e Herrmann (1989), foi elaborada uma simulação numérica

de uma rede de fusíveis aleatórios, em que os limites de queima dos fusíveis foram distribuídos aleatoriamente. Verificaram os perfis de fratura da rede proporcionalmente ao tamanho L da rede, e as correlações foram obtidas por meio de uma Lei de Potência e a distribuição Weibull.

No experimento de Otomar et al. (2006), verificou-se o modelo de fusíveis aleatórios, em uma rede quadrada, adotando dois tipos de fusíveis: fios de cobre e palha de aço. Nesse estudo utilizaram uma rede de fios de cobre como rede uniforme, e a inclusão de palha de aço introduziu desordem ao sistema. O tamanho da rede também foi analisado como fator, e a função de diferença de potencial por corrente foi investigada para obter uma Lei de Potência. Os resultados confirmam experimentalmente as previsões do modelo de De Arcangelis e Herrmann (1989), em que se observava colapso simultâneo das curvas de Lei de Potência para redes desordenadas.

No trabalho de Freitas (2007), foram conduzidos experimentos práticos similares ao realizados no trabalho de Otomar et al. (2006), mas modificando a geometria da rede, cuja ligação entre os fusíveis possuía a inclinação de 45 graus. Freitas (2007) obteve resultados diferentes de Otomar et al. (2006) e De Arcangelis e Herrmann (1989), uma vez que não observou colapso simultâneo das curvas, evidenciando dois regimes distintos e um regime intermediário entre os regimes frágil e dúctil.

O presente projeto é fundamentado nas observações de Freitas (2007) e propõe o desenvolvimento de uma simulação computacional para reproduzir os experimentos práticos efetuados, adicionando uma nova geometria, a hexagonal.

MODELO DE FUSÍVEIS ALEATÓRIOS

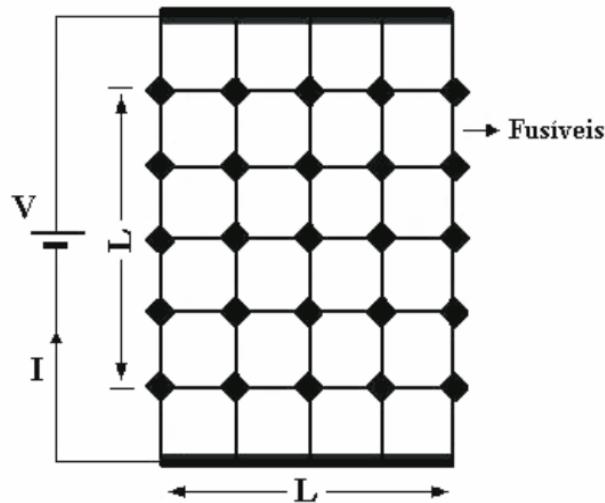
O modelo de fusíveis aleatórios consiste em uma rede elétrica com um fusível em cada ponto da rede. Tais fusíveis possuem uma resistência e consequentemente um valor máximo de tensão suportado.

As redes podem variar em tamanho, comumente denotado como L , o tamanho linear na rede. Em uma rede quadrada simples,

L equivale ao número de fusíveis em uma seção horizontal da rede.

As redes também podem variar em geometria. O formato clássico para esse modelo é a rede quadrada, mostrado na Figura 1. No estudo de Freitas (2007), foi introduzida a geometria em 45 graus, mostrada na Figura 2. No presente trabalho, além das redes quadradas e de geometria em 45 graus, foi introduzida uma terceira geometria, a hexagonal (Figura 3).

Figura 1: Geometria quadrada



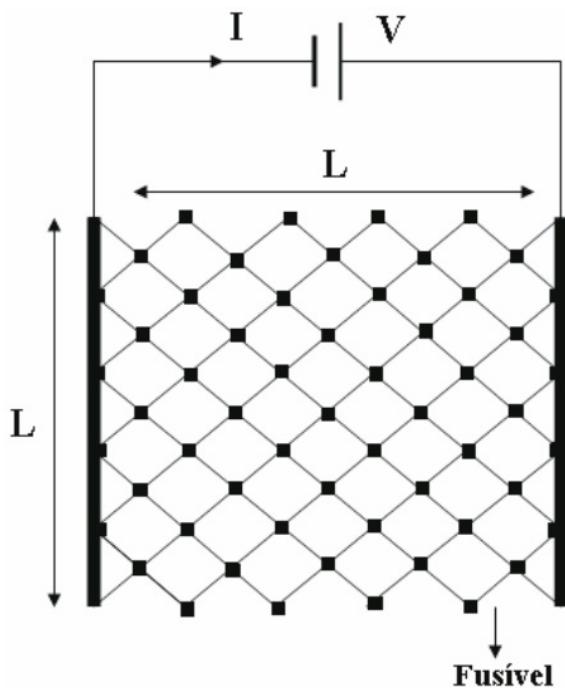
Fonte: FREITAS, 2007

Quando a desordem é nula ($D = 0$), todos os fusíveis são iguais, o que leva a uma queda de potencial homogênea e, quando ocorre uma trinca, ela se espalha instantaneamente pela rede. Já quando a desordem é total ($D = 1$), todos os fusíveis são diferentes. Isso significa que a queda de potencial é heterogênea na rede, o que diminui a chance de uma trinca se espalhar rapidamente pelo sistema (comportamento dúctil). Desordens nesse intervalo ($D \in [0, 1]$) tendem a um dos dois comportamentos.

A simulação de um sistema através desse modelo consiste na aplicação sequencial de diferentes tensões à rede, seguida da medição da corrente final e verificação da queima dos fusíveis. Quando ocorrer uma fratura completa, não existirá mais transmissão de corrente, e esta valerá 0. O resultado é uma curva $V \otimes I$, como

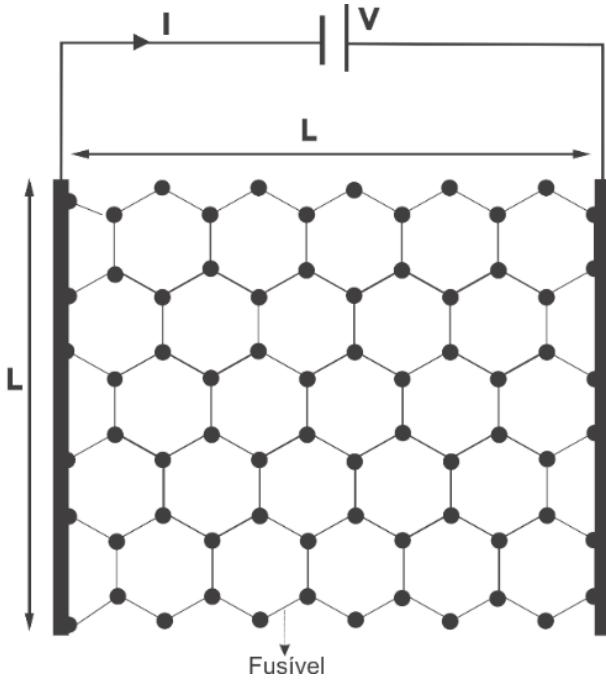
apresenta a Figura 4.

Figura 2: Geometria em 45 graus



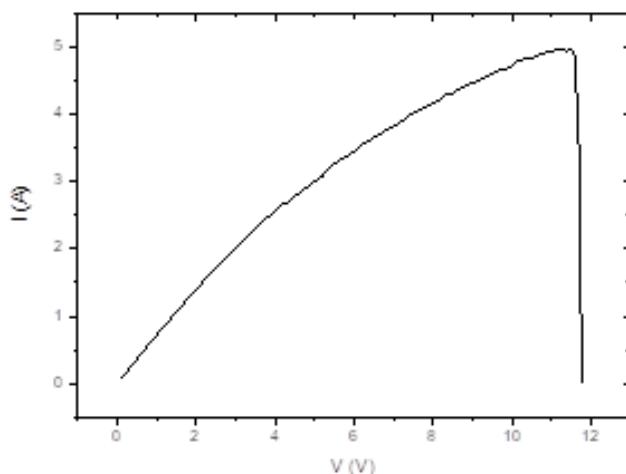
Fonte: FREITAS, 2007

Figura 3: Geometria hexagonal



Fonte: elaborada pelos autores.

Figura 4: Curva típica $V \times I$



Fonte: elaborada pelos autores.

MÉTODO DE DESENVOLVIMENTO

Para a escrita do programa de simulação, foi escolhida a linguagem C++14. Como alguns componentes da simulação necessitam da resolução de sistemas lineares, foi escolhida a biblioteca de álgebra linear Eigen, Guennebaud e Benoît (2010).

A rede foi desenvolvida utilizando-se um grafo, representado simultaneamente por uma matriz e uma lista de adjacência. A cada iteração da simulação, a tensão foi incrementada por um ΔV , e a corrente foi calculada através da aplicação da Lei de Correntes de Kirchoff, Halliday, Resnick e Walker (2009). A simulação era interrompida quando não existia mais corrente sendo transmitida.

Cada simulação recebeu como parâmetros a desordem adotada, o tamanho da rede e a geometria utilizada. As desordens foram adotadas no intervalo $D \in [0, 1]$, em incrementos de 0.2. O tamanho de rede foi adotado no conjunto $L \in \{7, 14, 20, 28\}$. Tais valores foram os mesmos adotados nos experimentos de Freitas (2007). As geometrias adotadas foram a quadrada (como em Otomar, 2006), 45 graus (como em Freitas, 2007) e hexagonal (inédita).

Para cada combinação de parâmetros

foram obtidas 10 curvas de tensão por corrente ($V \times I$). Dentre elas, uma foi escolhida para representar a combinação, de forma que a selecionada fosse a que melhor evidenciasse o comportamento dos parâmetros. As curvas obtidas foram agrupadas de duas formas: uma primeira fixando-se o tamanho para cada geometria, e variando a desordem, resultando em 12 gráficos; e uma segunda forma, fixando-se a desordem para cada geometria, e variando o seu tamanho, resultando em 18 gráficos;

Para analisar o comportamento dessas curvas, foi aplicada uma Lei de Potência (equação 1) definida por De Arcangelis e Herrmann, (1989). Dezoito gráficos foram obtidos, agrupando as curvas por desordem e geometria, variando os tamanhos. Os expoentes α e β foram definidos de forma que os gráficos gerados apresentassem colapso entre as diferentes curvas, isto é, que apresentassem comportamento singular na região crítica.

$$I = L^\alpha (V L^\beta) \quad (1)$$

RESULTADOS

Gráficos de $I \times V$ com tamanho fixo

Os gráficos apresentados nas Figuras 5 e 6 representam as curvas de corrente por tensão agrupadas por tamanho e geometria, variando a desordem. É possível observar uma mudança de comportamento nas curvas em torno da desordem $D = 0.4$ para todas as geometrias e tamanhos. Isso acontece porque, conforme a desordem aumenta, a quantidade de caminhos alternativos pelos quais uma corrente pode passar na rede aumenta.

Quando a desordem é baixa, há pouca variação nas trajetórias por conta da uniformidade da rede; quando a desordem aumenta, caminhos que antes eram inviáveis podem chegar à viabilidade, e vice-versa.

Gráficos de $I \times V$ com desordem fixa

Os gráficos apresentados nas Figuras 7, 8 e 9 representam as curvas de corrente por tensão agrupadas por desordem e geometria, variando o tamanho. Assim como no resultado obtido para $I \times V$ com tamanho fixo, verificou-se uma mudança de comportamento nas curvas em torno da desordem $D = 0.4$ para todas as geometrias e tamanhos.

Essa mudança é visível através do formato de diferentes gráficos com $D < 0.4$ e $D \geq 0.4$. Os gráficos antes do ponto contêm curvas pouco sinuosas, enquanto os depois do ponto contêm curvas sinuosas.

Gráficos de colapso com a Lei de Potência

Os gráficos apresentados nas Figuras 10, 11 e 12 mostram o colapso das curvas usando a Equação 1. Os expoentes estão expostos na Tabela 1. Foi possível obter o colapso para todas as curvas, e, dentro de uma mesma geometria, os expoentes são similares. Isso indica um padrão de comportamento dentro de uma mesma geometria.

Também é possível observar a diferença no perfil das curvas para tamanhos menores em comparação com tamanhos maiores. Tamanhos menores apresentam curvas mais ruidosas, em que cada evento de queima causa alterações expressivas no formato da curva. Tamanhos maiores já apresentam curvas mais suaves, em que eventos de queima não alteram o formato tão drasticamente.

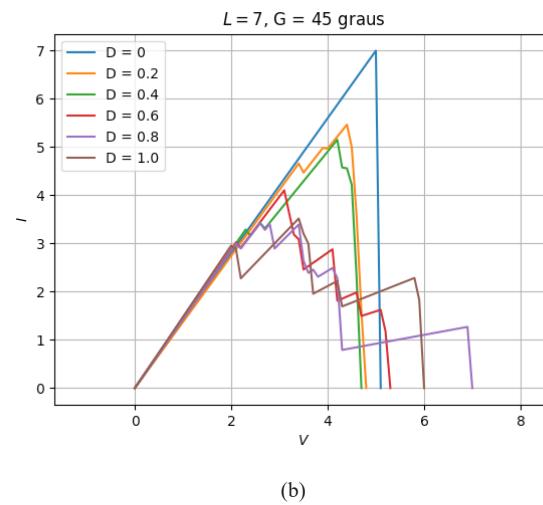
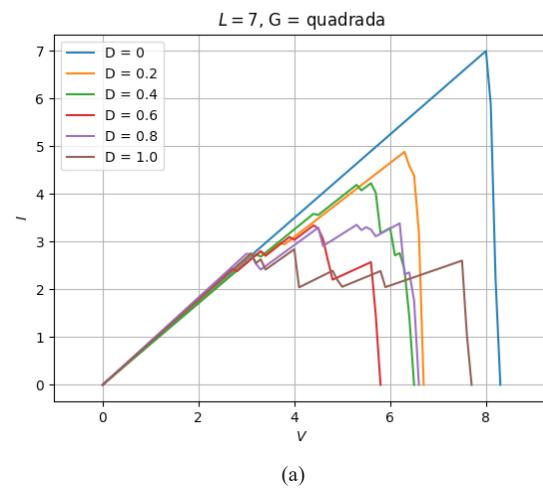
Esse comportamento se deve à maior quantidade de caminhos disponíveis nas redes de tamanho maior, como a rede $L = 20$ e $L = 28$. A queima de um fusível significa a eliminação de uma quantidade relativamente significativa de caminhos na rede quando esta é pequena. Quando a rede é maior, ainda resta uma quantidade relevante de caminhos a serem seguidos para que a corrente continue a fluir.

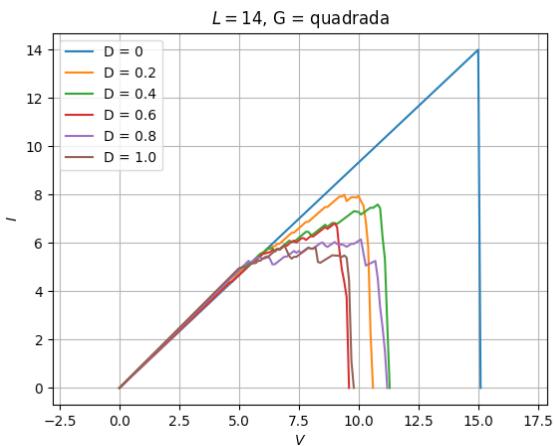
Tabela 1: Exponentes da Lei de Potência

Desordem	Geometrias					
	Quadrada		45 graus		Hexagonal	
	α	β	α	β	α	β
0	0.7	0.64	0.5	0.39	0.7	0.65
0.2	0.67	0.57	0.6	0.45	0.5	0.4
0.4	0.45	0.35	0.55	0.43	0.5	0.42
0.6	0.6	0.55	0.45	0.29	0.5	0.45
0.8	0.5	0.45	0.5	0.35	0.5	0.43
1	0.4	0.32	0.5	0.35	0.5	0.37

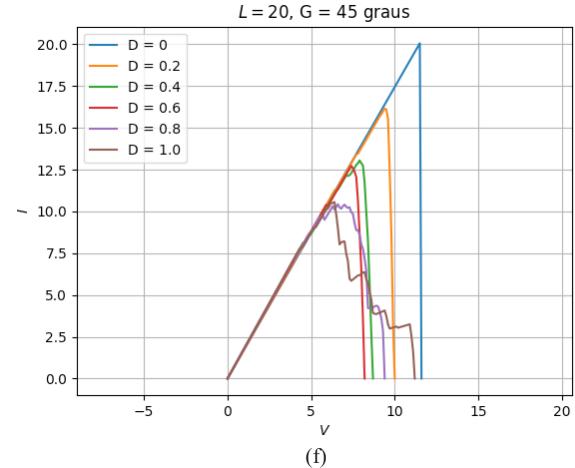
Fonte: elaborada pelos autores (2018).

Figura 5: Gráficos de $I \times V$ com tamanho fixo





(c)

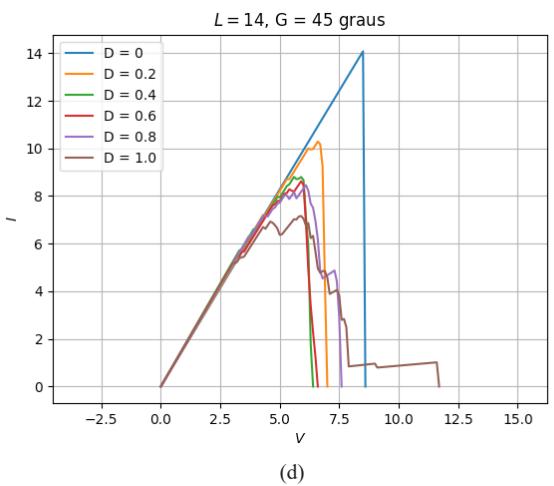


(f)

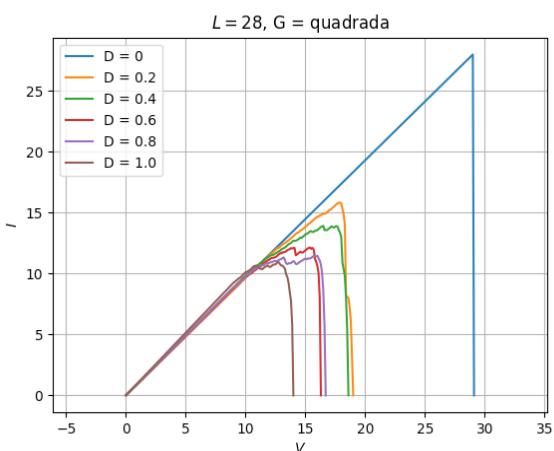
Fonte: elaborada pelos autores (2018).

(a) $L = 7$, quadrada. (b) $L = 7$, 45 graus. (c) $L = 14$, quadrada. (d) $L = 14$, 45 graus. (e) $L = 20$, quadrada. (f) $L = 20$, 45 graus.

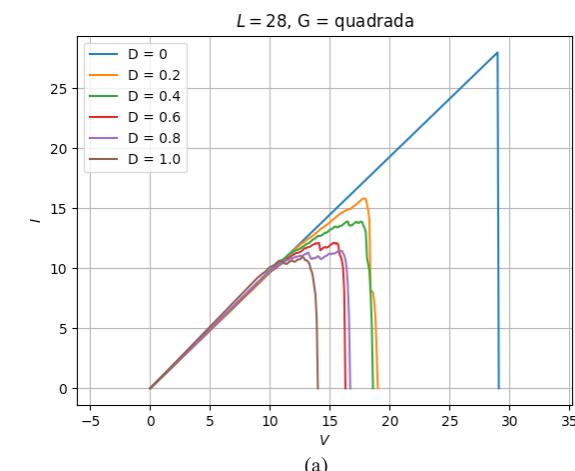
Figura 6: Gráficos de IxV com tamanho fixo (cont.)



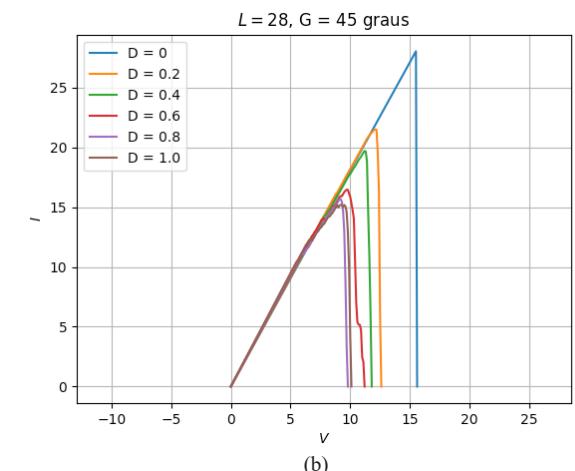
(d)



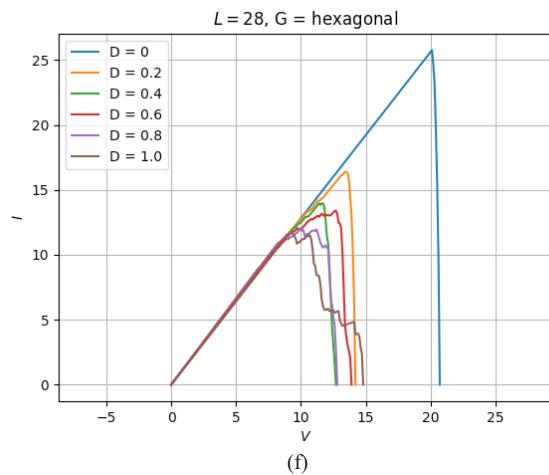
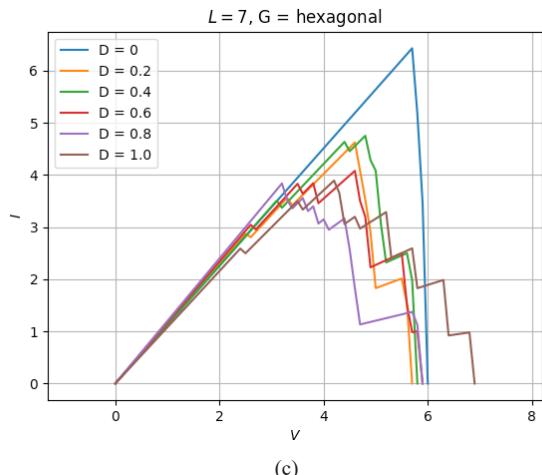
(e)



(a)



(b)



Fonte: elaborada pelos autores (2018).

(a) *L* = 28, quadrada. (b) *L* = 28, 45 graus. (c) *L* = 7, hexagonal. (d) *L* = 14, hexagonal. (e) *L* = 20, hexagonal. (f) *L* = 28, hexagonal.

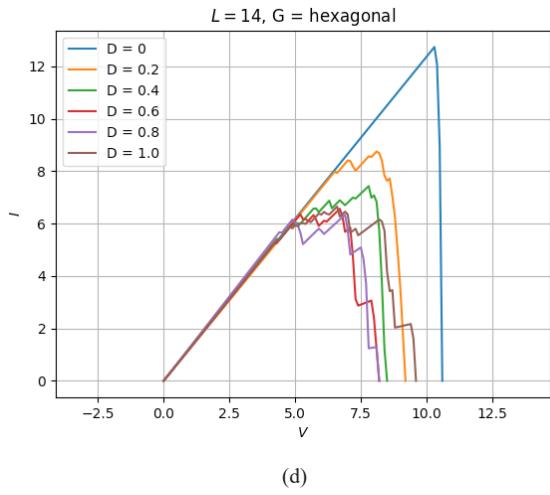
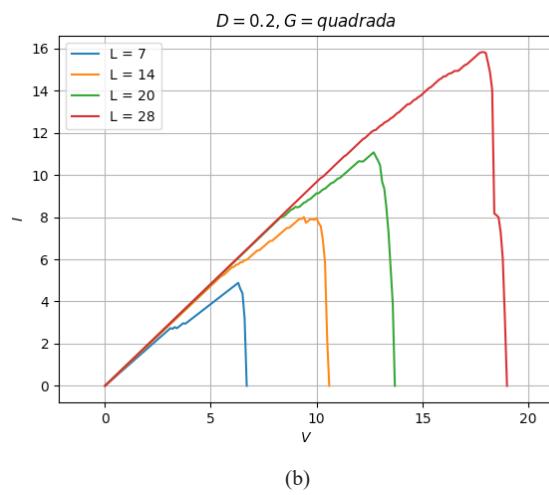
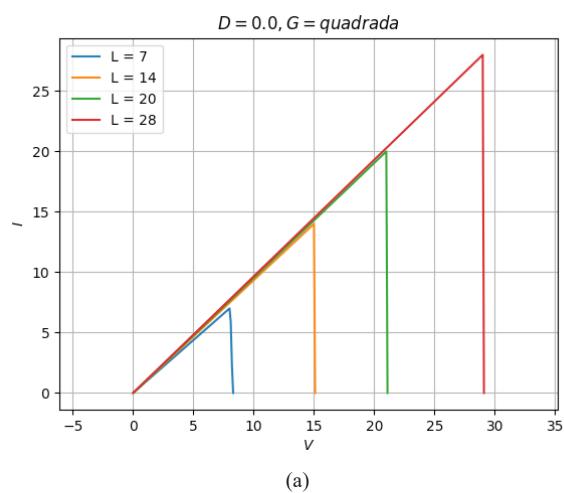
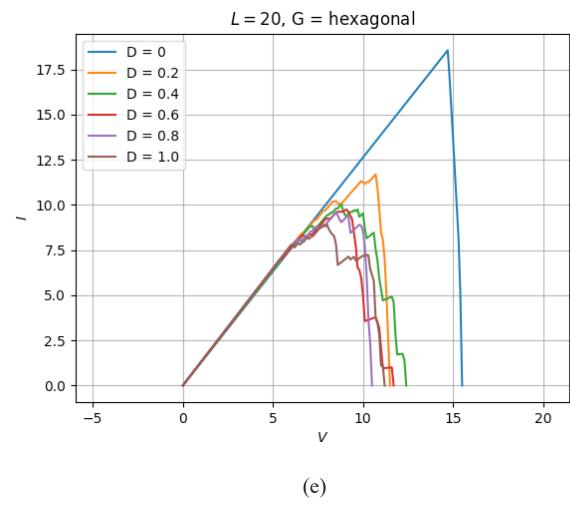
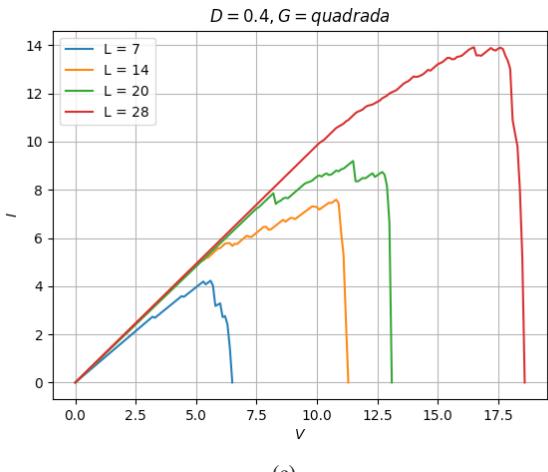
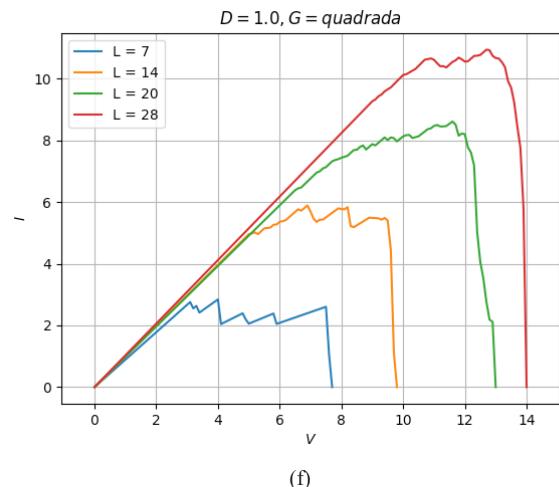


Figura 7: Gráficos de VxI com desordem fixa: geometria quadrada





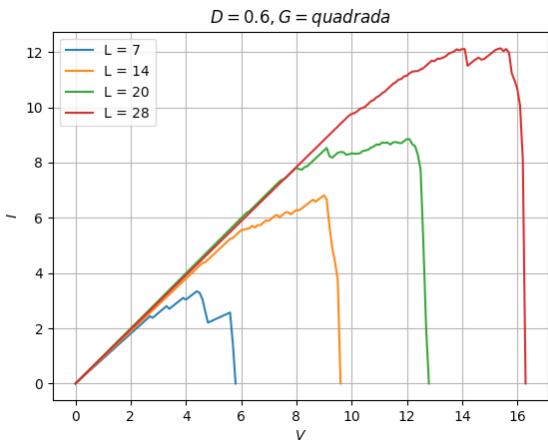
(c)



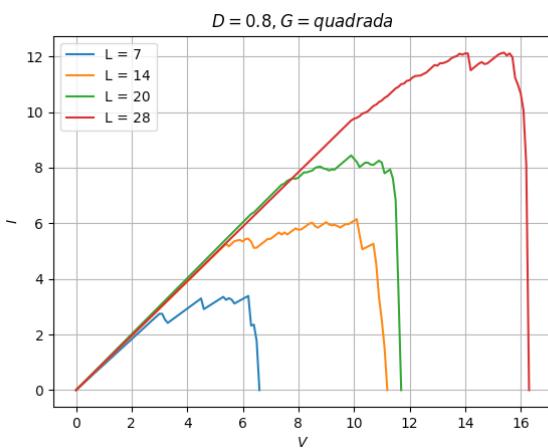
(f)

Fonte: elaborada pelos autores (2018).

(a) D = 0 (b) D = 0.2 (c) D = 0.4 (d) D = 0.6 (e) D = 0.8 (f) D = 1

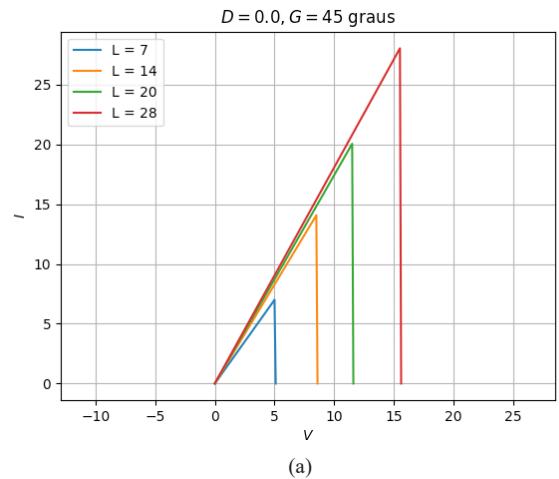


(d)

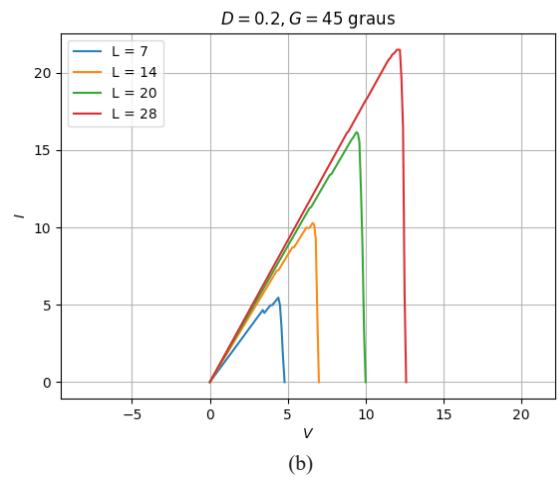


(e)

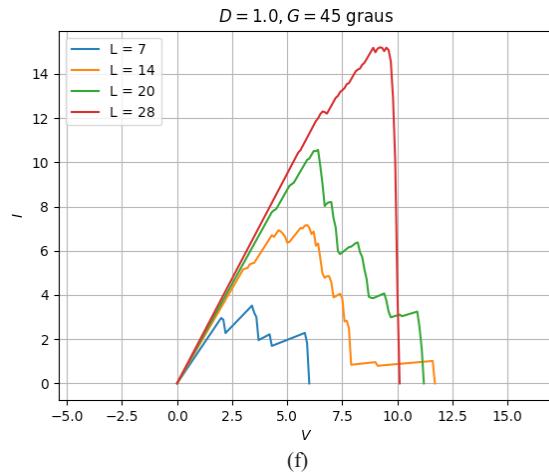
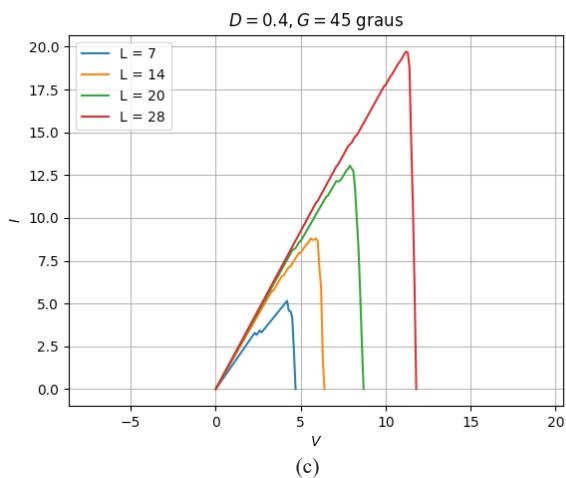
Figura 8: Gráficos de Vx1 com desordem fixa: geometria 45 graus



(a)



(b)



Fonte: elaborada pelos autores (2018).

(a) $D = 0$ (b) $D = 0.2$ (c) $D = 0.4$ (d) $D = 0.6$ (e) $D = 0.8$ (f) $D = 1$

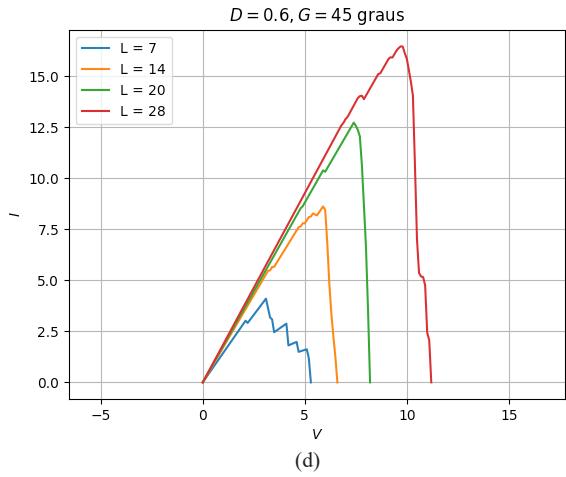
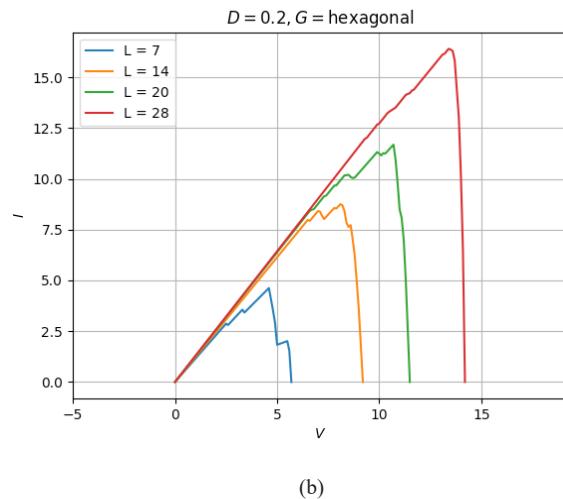
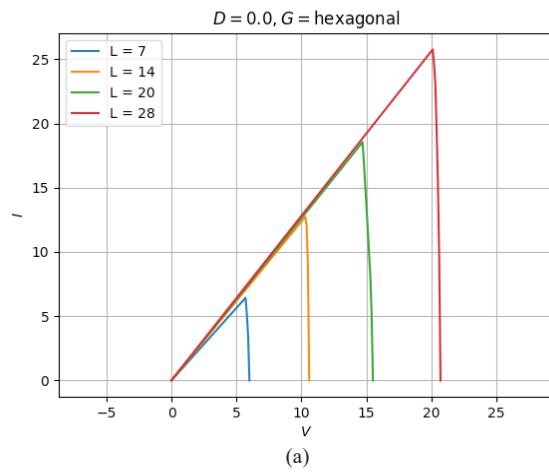
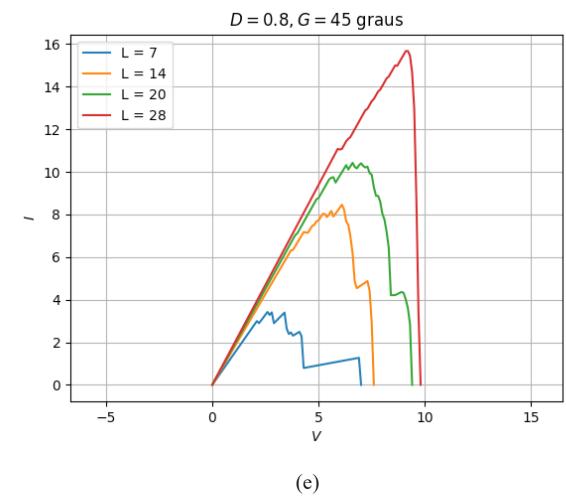
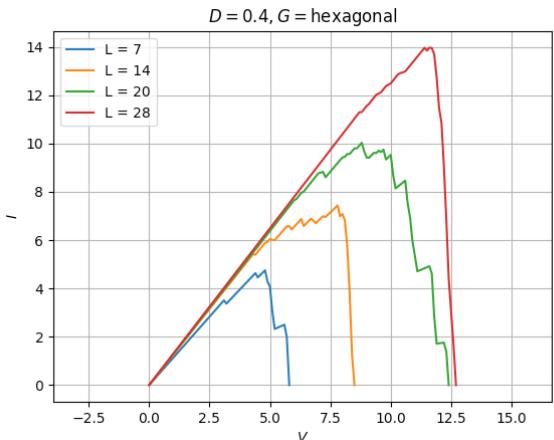
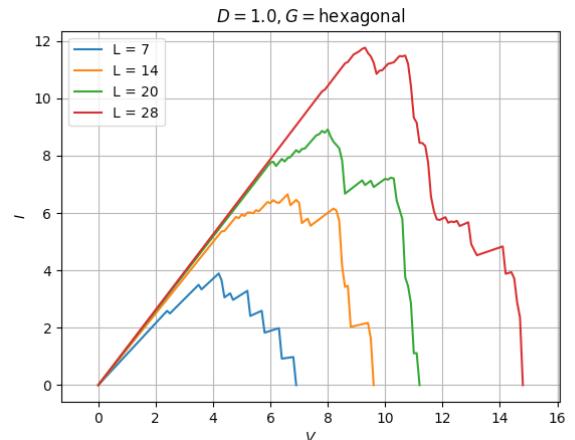


Figura 9: Gráficos de VxI com desordem fixa: geometria hexagonal





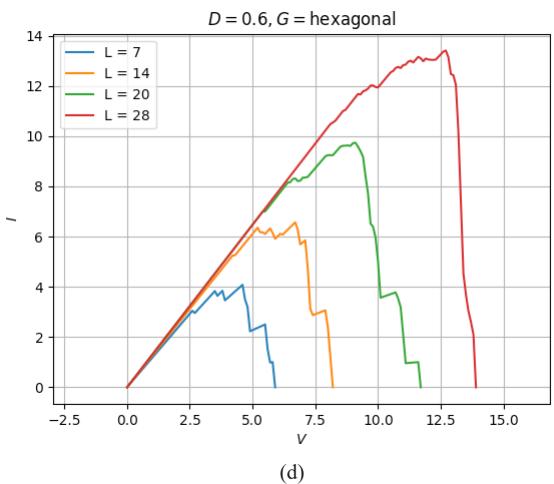
(c)



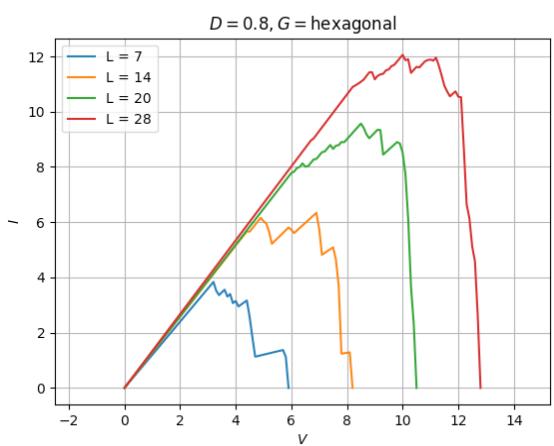
(f)

Fonte: elaborada pelos autores (2018).

(a) $D = 0$ (b) $D = 0.2$ (c) $D = 0.4$ (d) $D = 0.6$ (e) $D = 0.8$ (f) $D = 1$

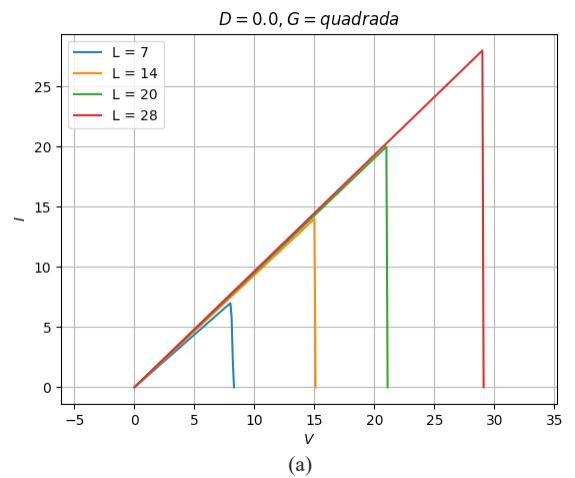


(d)

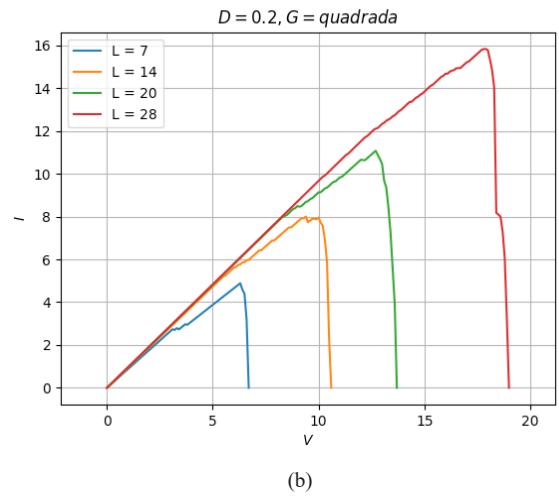


(e)

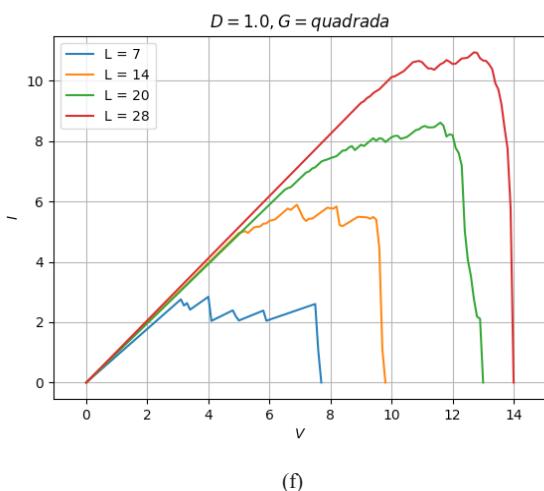
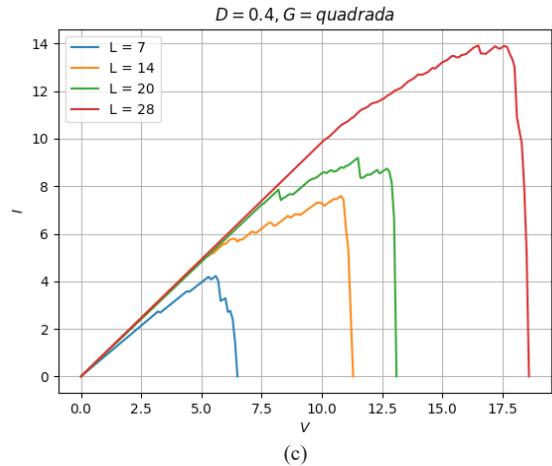
Figura 10: Gráficos de colapso pela Lei de Potência (Equação 1): geometria quadrada



(a)



(b)



Fonte: elaborada pelos autores (2018).

(a) $D = 0$ (b) $D = 0.2$ (c) $D = 0.4$ (d) $D = 0.6$ (e) $D = 0.8$ (f) $D = 1$

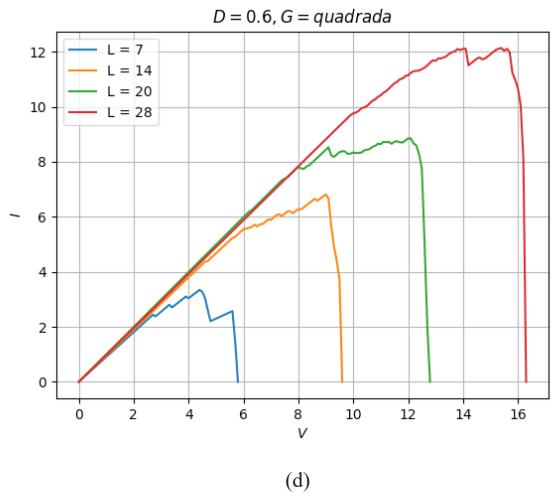
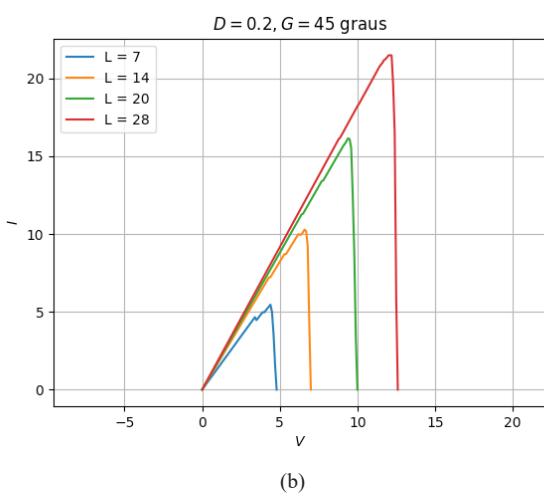
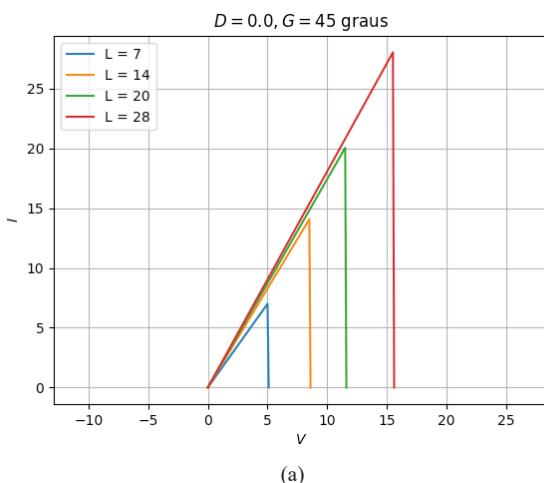
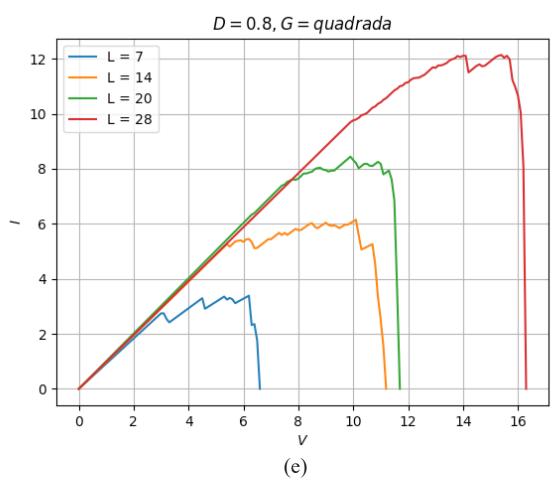


Figura 11: Gráficos de colapso pela Lei de Potência (Equação 1): geometria 45 graus



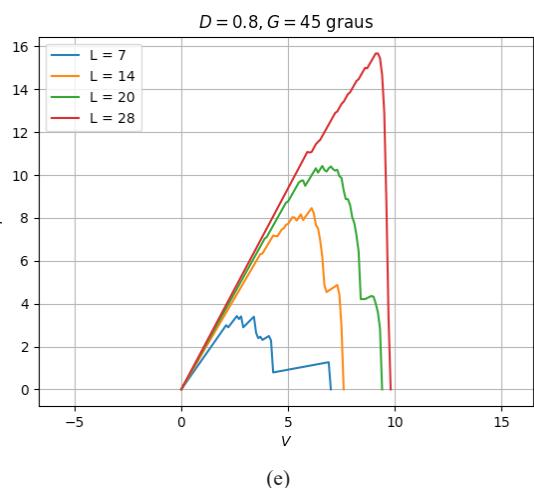
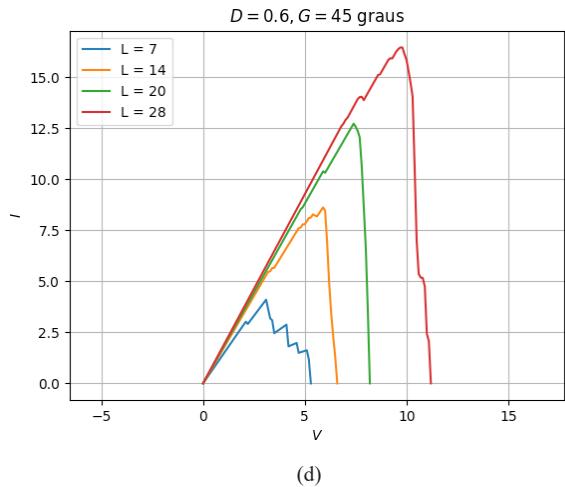
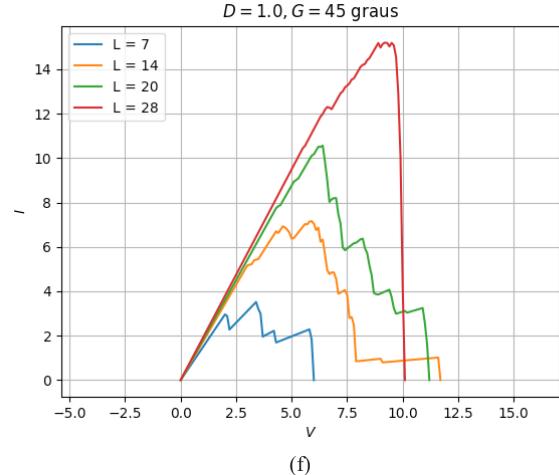
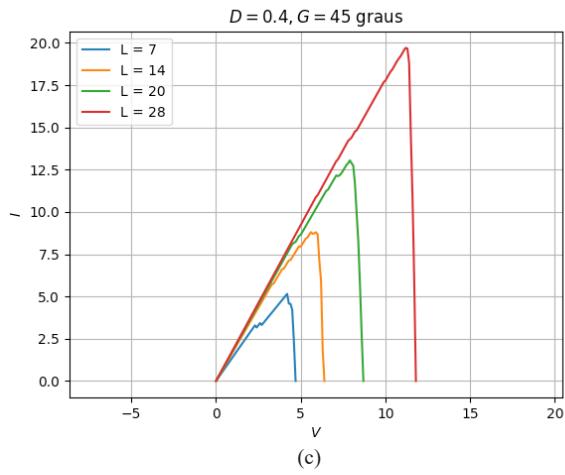
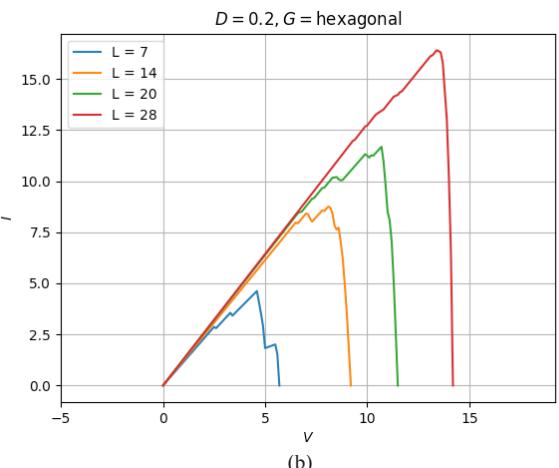
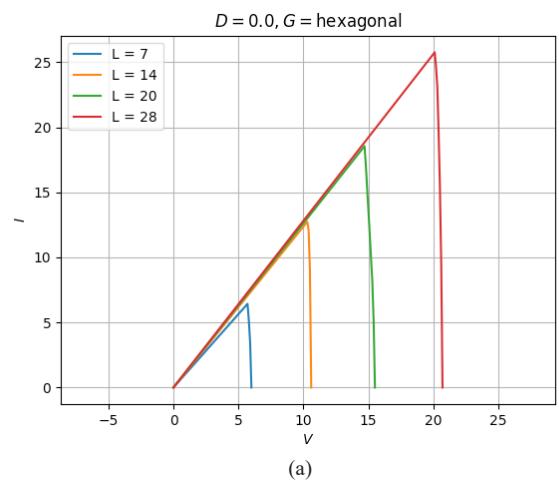
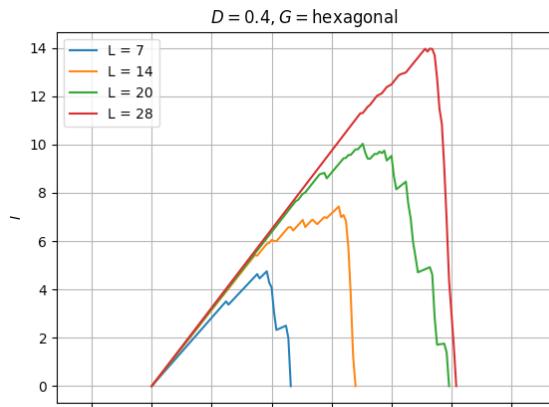
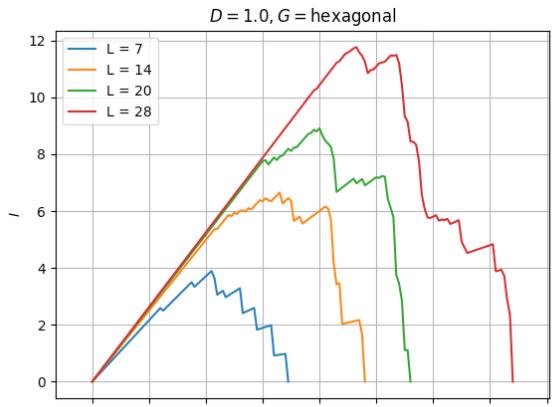


Figura 12: Gráficos de colapso pela Lei de Potência (Equação 1): geometria hexagonal





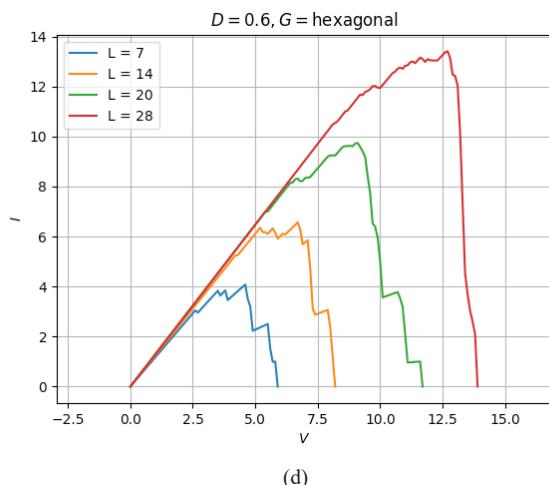
(c)



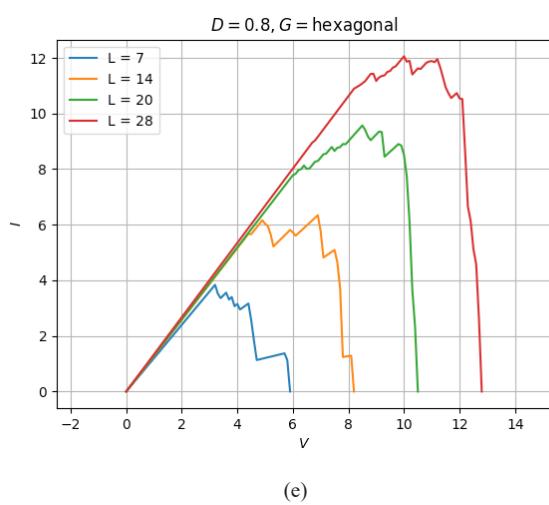
(f)

Fonte: elaborada pelo autores (2018).

(a) $D = 0$ (b) $D = 0.2$ (c) $D = 0.4$ (d) $D = 0.6$ (e) $D = 0.8$ (f) $D = 1$



(d)



(e)

CONCLUSÕES

Este trabalho investigou o comportamento de Redes de Fusíveis Aleatórios sob diferentes condições de tamanhos, geometrias e desordens. Juntamente com as geometrias quadrada e 45 graus, já abordadas na literatura, foi introduzida a geometria hexagonal, inédita.

Construiu-se uma simulação computacional eficiente dessas redes, e os resultados obtidos foram comparados. Além disso, aplicou-se uma Lei de Potência (Equação 1) para analisar os perfis de colapso.

Observou-se que há uma mudança de comportamento nas curvas por volta da desordem de $D = 0.4$, e isso se manteve para todas as geometrias e tamanhos estudados. Esse comportamento se deve à relação entre desordem e formato das trajetórias nas redes. Quando a desordem é baixa, a rede tende à uniformidade, e essas trajetórias têm formato similar. Esse perfil uniforme tende a um comportamento frágil, uma vez que o rompimento de um caminho rapidamente se espalha para outros. Quando a desordem aumenta, trajetórias mais heterogêneas surgem, e com isso novos caminhos viáveis. Tais caminhos contribuem para um comportamento mais dúctil, de forma que mesmo que alguns se

rompam, existem outros diferentes o suficiente para se manterem e continuarem o transporte da corrente.

Essa mudança de comportamento em torno da desordem $D = 0.4$ é verificada através da diferença no formato das curvas. Para os gráficos de VxI com desordem fixa (Figuras 7, 8 e 9) isso é facilmente identificado, pois gráficos com $D < 0.4$ exibem curvas menos ruidosas e processo de queima dos fusíveis mais rápido, enquanto gráficos com $D \geq 0.4$ exibem curvas ruidosas e processo de queima mais lento.

A partir da utilização da Lei de Potência (Equação 1), conclui-se que existe um padrão nos expoentes aplicados para as curvas, pois dentro de uma mesma geometria os expoentes apresentam valores próximos independente da desordem estudada.

Também é possível reconhecer como o tamanho das redes altera seu comportamento. Redes menores ($L = 7$ e 14) têm comportamento menos padronizado, em que cada evento de queima altera o formato da curva drasticamente. Em redes maiores ($L = 20$ e 28), esses eventos não são tão impactantes. Esse comportamento menos padronizado nas redes menores acontece devido ao número restrito de caminhos possíveis para transmissão da corrente; já em redes maiores, o número de caminhos é maior. Com isso, no evento de queima, restam poucas alternativas para as redes pequenas, o que se reflete no impacto na curva. Já nas redes maiores, como o número de caminhos é maior, existe uma quantidade relevante de alternativas, o que resulta num impacto menor no formato da curva.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A. T.; MOREIRA, J. G. Model for fracture in fibrous materials. *Physical Review B*, v. 49, n. 21, p. 15035, 1994.

DE ARCANGELIS, L.; HERRMANN, H. J. Scaling and multiscaling laws in random fuse networks. *Physical Review B*, v. 39, n. 4, p. 2678, 1989.

FREITAS, K. A. Estudo experimental do modelo aleatório de fusíveis. *Dissertação (Mestrado em Física)* - Universidade

Federal de Viçosa, Viçosa, 2007.

GUENNEBAUD, G; BENOÎT, J. Eigen. 2010. Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org>. Acesso em: 02 set. 2017.

HALLIDAY D.; RESNICK R.; WALKER, J. *Fundamentos de física*. v. 3. 8. ed. São Paulo: LTC, 2009.

KAHNG, B. et al. Electrical breakdown in a fuse network with random, continuously distributed breaking strengths. *Physical Review B*, v. 37, n. 13, p. 7625, 1988.

LAMAINÈRE, L.; CARMONA, F.; SORNETTE, D. Experimental realization of critical thermal fuse rupture. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 13, p. 2738, 1996.

MENEZES-SOBRINHO, I. L.; BERNARDES, A. T.; MOREIRA, J. G. Failure regimes in (1+ 1) dimensions in fibrous materials. *Physical Review E*, v. 63, n. 2, p. 025104, 2001.

MENEZES-SOBRINHO, I. L.; MOREIRA, J. G.; BERNARDES, A. T. Scaling behaviour in the fracture of fibrous materials. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, v. 13, n. 2, p. 313–318, 1 jan. 2000.

OTOMAR, D. R. *Investigação experimental do modelo de fusíveis*. *Dissertação (Mestrado em Física)* - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2005.

OTOMAR, D. R.; MENEZES-SOBRINHO, I. L.; COUTO, M. S. Experimental realization of the fuse model of crack formation. *Physical Review Letters*, v. 96, n. 9, p. 095501, 2006.

SORNETTE, D.; VANNESTE, C. Dynamics and memory effects in rupture of thermal fuse networks. *Physical Review Letters*, v. 68, n. 5, p. 612, 1992.